

## Parte I

# Nociones básicas de conjuntos y aplicaciones

## 1. Nociones básicas

Un conjunto está BIEN DEFINIDO cuando se puede saber sin ambigüedad si un elemento pertenece o no a él. La definición puede hacerse:

- Por extensión: enumerando un por uno todos sus elementos, si es finito.
- Por comprensión: enunciando las propiedades verificadas por todos sus elementos, y sólo por ellos.

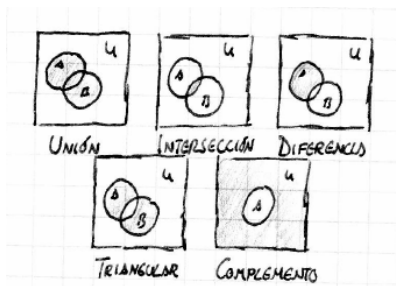
El conjunto  $A$  se dice SUBCONJUNTO de  $B$  ( $A \subset B$ ) si todos los elementos de  $A$  están contenidos en  $B$  ( $a \in A \Rightarrow a \in B \forall a \in A$ ). Si la relación es recíproca ( $a \in A \Leftrightarrow a \in B \forall a \in A$ ), los conjuntos son iguales. Aquel conjunto que no tiene elementos se dice VACÍO ( $\phi$ ), y es subconjunto de todo  $A$ .

## 2. Operaciones entre conjuntos

Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos de  $U$ , se definen las siguientes operaciones:

- (1) UNIÓN ( $A \cup B$ ):  $\{x \in U : x \in A \text{ o } x \in B\}$
- (2) INTERSECCIÓN ( $A \cap B$ ):  $\{x \in U : x \in A \text{ \& } x \in B\}$
- (3) DIFERENCIA ( $A - B$ ):  $\{x \in U : x \in A \text{ \& } x \notin B\}$
- (4) DIFERENCIA TRIANGULAR ( $A \Delta B$ ):  $(A - B) \cup (B - A)$
- (5) COMPLEMENTARIO  $\bar{A} = \{x \in U : x \notin A\}$

Dos conjuntos cuya intersección es  $\phi$  se dicen DISJUNTOS



Estas operaciones verifican las siguientes propiedades para cualesquiera conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ :

- (1) IDEMPOTENCIA  $A \cup A = A \cap A = A$
- (2) CONMUTATIVIDAD  $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$

- (3) ASOCIATIVIDAD  

$$\begin{cases} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{cases}$$
- (4) DISTRIBUTIVIDAD  

$$\begin{cases} (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{cases}$$
- (5) LEYES DE MORGAN  $\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$
- (6)  $A \cup (B \cap A) = A \cap (B \cup A) = A$

Adicionalmente, se define el PRODUCTO CARTESIANO de  $n$  conjuntos,  $A_1 \times A_2 \times A_3 \dots \times A_n$ , como el conjunto de las  $n$ -éplas ordenadas  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , donde  $a_i \in A_i$ .  $\mathbb{R}^2$  es el producto cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

### 3. Aplicaciones

Dados los conjuntos  $A$  y  $B$ , se dice APLICACIÓN ( $f$ ) de  $A$  en  $B$  a una relación unívoca entre cada  $a \in A$  y un elemento  $b \in B$ , llamado IMAGEN de  $a$  por  $f$ . En esta relación, el conjunto  $A$  se denomina DOMINIO;  $B$ , RANGO. La aplicación que relaciona cada miembro de un conjunto  $A$  consigo mismo se llama IDENTIDAD,  $I_A$ .

(1)  $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$

(2)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(3)  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

(4)  $C \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(B)$

(5)  $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$   
 $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

El subconjunto de  $B$  formado por las imágenes de los elementos de  $A$  por  $f$  se denomina IMAGEN de  $f$ , y se denota por  $Imf$  o  $f(A)$ :

$$Imf = \{b \in B : \exists a \in A : b = f(a)\}$$

La RECÍPROCA o IMAGEN INVERSA de  $B_1 \subseteq B$  por  $f$  es el subconjunto de  $A$  cuyos elementos tienen imagen por  $f$  en  $B_1$ :

$$f^{-1}(B_1) = \{a \in A : f(a) \in B_1\}$$

Dados  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$ , se llama COMPOSICIÓN de  $f$  con  $g$ ,  $g \circ f : A \rightarrow C$ , a una aplicación:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \forall a \in A$$

Biyectiva quiere decir al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva.

- $f, g$  inyectivas  $\Rightarrow$   $g \circ f$  inyectiva
- $f, g$  sobreyectivas  $\Rightarrow$   $f \circ g$  sobreyectiva
- $(g \circ f)$  inyectiva  $\Rightarrow$   $f$  inyectiva  
 $(g(f(a)) = g(f(a')) \Leftrightarrow a = a'$   
 $\Rightarrow f(a) = f(a') \Leftrightarrow a = a'$
- $(f \circ g)$  sobreyectiva  $\Rightarrow$   $g$  sobreyectiva  
 $\forall c \in C \exists a \in A : g(f(a)) = c$   
 $\Rightarrow \forall c \in C \exists b \in B : g(b) = c$   
 $\Rightarrow g$  sobreyectiva

La aplicación INVERSA de  $f : A \rightarrow B$ ,  $f^{-1}$ , es aquélla que verifica:

$$(f^{-1} \circ f) = I_A \text{ y } (f \circ f^{-1}) = I_B$$

Si existe la inversa, es única. Sea  $f : A \rightarrow B$  con dos inversas distintas,  $g : B \rightarrow A$  y  $g' : B \rightarrow A$ :

$$g' = I_A \circ g' = (g \circ f) \circ g' = g \circ (f \circ g') = g \circ I_B = g$$

Una aplicación  $f : A \rightarrow B$  se dice:

- (1) INYECTIVA:  $f(a) = f(a') \Leftrightarrow a = a' \forall a \in A$
- (2) SOBREYECTIVA:  $f(A) = B$
- (3) BIYECTIVA:  $\forall b \in B \exists ! a \in A : f(a) = b$

$f : A \rightarrow B$  es biyectiva  $\Leftrightarrow$  tiene inversa:

- "  $\Rightarrow$  "  $\forall b \in B \exists ! a \in A : f(a) = b$   
 $g : B \rightarrow A$  con  $g(b) = a$  verifica:  
 $(g \circ f) = I_A$  y  $(f \circ g) = I_B$
- "  $\Leftarrow$  "  $(f^{-1} \circ f) = I_A$ , inyectiva  $\Rightarrow f$  inyectiva  
 $(f \circ f^{-1}) = I_B$ , sobreyectiva  $\Rightarrow f$  sobreyectiva

## Parte II

# Elementos de la teoría de grupos

## 1. Operaciones

Dadas dos operaciones internas en  $X$ , se dice que  $*$  es distributiva por la izquierda respecto a  $\cdot$  si verifica:

$$x_1 * (x_2 \cdot x_3) = (x_1 * x_2) \cdot (x_1 * x_3)$$

La distributividad por la derecha se define de forma análoga.

Unicidad del neutro para  $*$  interna:

$$e_1 = e_1 * e_2 = e_2$$

Un elemento es IDEMPOTENTE para  $*$  interna si:

$$x * x = x$$

Se denomina OPERACIÓN INTERNA en el conjunto  $X$  a una aplicación  $*$  tal que  $*$ :  $X * X \rightarrow X$ . Dicha operación será CONMUTATIVA si  $x_1 * x_2 = x_2 * x_1 \quad \forall x_1, x_2 \in X$ , y ASOCIATIVA i verifica  $(x_1 * x_2 * x_3) = x_1 * (x_2 * x_3) \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in X$ .

Dados una operación interna en  $X$  y uno de los miembros de este conjunto,  $e$ , se dice que el elemento es NEUTRO para la operación si:

$$e * x = x * e = x \quad \forall x \in X$$

Aquel elemento que operado con  $x$  da siempre como resultado el neutro se dice SIMÉTRICO de  $x$ , y se denota  $x^{-1}$ . Respecto de una operación interna y asociativa, el simétrico de cada elemento es único:

$$\begin{aligned} x_1^{-1} &= e * x_1^{-1} = (x_2^{-1} * x) * x_1^{-1} = \\ &= x_2^{-1} * (x * x_1^{-1}) = x_2^{-1} * e = x_2^{-1} \end{aligned}$$

## 2. Elementos de la teoría de grupos

Un grupo es ABELIANO si la operación interna es conmutativa.

En un grupo, sólo el elemento neutro es idempotente:

$$\exists x : x * x = x$$

$$e = x^{-1} * (x * x) = (x^{-1} * x) * x$$

$$(x^{-1} * x) * x = e * x = x$$

Dados un conjunto no vacío,  $G$ , y una operación interna en él,  $*$ , se dice que  $(G, *)$  es un GRUPO si:

- (1) La operación es asociativa
- (2)  $\exists e \in G : e * x = x * e = x \quad \forall x \in G$
- (3)  $\exists x^{-1} \in G : x^{-1} * x = x * x^{-1} = e \quad \forall x \in G$

Si  $*$  es interna en  $H \subset G$ ,  $H \neq \emptyset$ , y  $(H, *)$  es un grupo,  $H$  se dice SUBGRUPO de  $G$ .

Propiedades básicas del homomorfismo  $f:G \rightarrow G'$ :

- (1)  $f(e_G) = e_{G'}$   
 $f(e_G) = f(e_G * e_G) = f(e_G) \cdot f(e_G) \Rightarrow$   
 $f(e_G)$  idempotente  $\Rightarrow f(e_G) = e_{G'}$
- (2)  $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$   
 $f(e_G) = f(x * x^{-1}) = f(x) \cdot f(x^{-1}) = e_{G'}$   
 $\Rightarrow f(x)^{-1} \cdot f(x) \cdot f(x^{-1}) = f(x^{-1})$

Otras propiedades:

- (1)  $\text{Ker} f$  subgrupo de  $G$
- (2)  $H$  subgrupo de  $G \Rightarrow f(H)$  subgrupo de  $G'$
- (3)  $T$  subgrupo de  $G' \Rightarrow f^{-1}(T)$  subgrupo de  $G$
- (4)  $\text{Im} f$  subgrupo de  $G'$

$f$  inyectiva  $\Leftrightarrow \text{Ker} f = \{e_G\}$

$f$  sobreyectiva  $\Leftrightarrow \text{Im} f = G'$

Dados los grupos  $(G, *)$  y  $(G', \cdot)$ , se dice de una aplicación  $f$  de  $G$  en  $G'$  que es un HOMOMORFISMO de grupos si verifica:

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y) \forall x, y \in G$$

Dado el homomorfismo  $f:G \rightarrow G'$ , se define  $\text{Ker} f$  como el conjunto de elementos de  $G$  cuya imagen por  $f$  es el neutro.

Un conjunto  $A$  con dos operaciones internas,  $(A, *, \cdot)$ , es un ANILLO si:

- (1)  $(A, *)$  es un grupo conmutativo
- (2)  $\cdot$  es asociativa
- (3)  $\cdot$  es distributiva respecto a  $*$  por ambos lados

Un anillo es UNITARIO si existe neutro para la segunda operación. Es abeliano si la operación  $\cdot$  es conmutativa.

Un anillo unitario en que cada elemento no nulo tiene simétrico respecto de la segunda operación se denomina CUERPO.

Parte III

Espacios vectoriales

1. Espacios vectoriales

(I)  $\alpha \Delta (v_1 + v_2) = \alpha \Delta v_1 + \alpha \Delta v_2$   
 $\forall \alpha \in K, v \in V$

(II)  $(\alpha + \beta) \Delta v = \alpha \Delta v + \beta \Delta v$   
 $\forall \alpha, \beta \in K, v \in V$

(III)  $(\alpha \beta) \Delta v = \alpha \beta (\beta \Delta v)$   
 $\forall \alpha, \beta \in K, v \in V$

(IV)  $e_K \Delta v = v \quad \forall v \in V$

(1) "  $\Rightarrow$  "  $\alpha \neq 0_K \Rightarrow \exists \alpha^{-1} 0_V =$   
 $\alpha^{-1} \Delta 0_V = \alpha^{-1} \Delta (\alpha v) =$   
 $(\alpha^{-1} \alpha) v = v$   
 "  $\Leftarrow$  "  $O_K \Delta v = (O_K - O_K) \Delta v =$   
 $O_K \Delta v - O_K \Delta v = O_v \alpha v \Delta O_v =$   
 $\alpha(O_v - O_v) = O_v$

(2)  $\alpha u + (-\alpha u) = v(\alpha - \alpha) = O_v =$   
 $\alpha O_V = \alpha O_v = \alpha v + \alpha(-v) \Rightarrow$   
 $(-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v)$

Un ESPACIO VECTORIAL es una terna  $((V, *), (K, +, \cdot), \Delta)$  tal que  $(V, *)$  es un grupo abeliano de vectores,  $(K, +, \cdot)$  es un cuerpo de escalares, y  $\Delta$  es una ley de composición externa que cumple las siguientes condiciones:

(I) Distributiva respecto a la suma de vectores

(II) Distributiva respecto a la suma de escalares

(III) Asociatividad

(IV) Existencia del neutro

Si  $V$  es un espacio vectorial sobre el cuerpo  $K$  ( $K$ -espacio vectorial), se verifica:

(1)  $\alpha v = e v \Leftrightarrow \alpha = 0_K$  o  $v = 0_V$

(2)  $(-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v)$

2. Subespacios de un espacio vectorial

Si  $\{V_i\}_i \in I$  es una familia de subespacios de  $V$ ,  $\cap_i \in I V_i$  es el mayor subespacio de  $V$  contenido en todos los  $V_i$ . No obstante, la unión de espacios vectoriales no es un espacio vectorial.

Un subconjunto no vacío de un  $K$ -espacio vectorial,  $U$ , se dice SUBESPACIO de  $V$  si:

(1)  $u_1 + u_2 \in U \quad \forall u_1, u_2 \in U \subset V$

(2)  $\alpha u \in U \quad \forall \alpha \in K, u \in U$

Además,  $U$  es un espacio vectorial con las mismas operaciones que  $V$  y el mismo neutro para la suma.

Si  $V_1$  y  $V_2$  son subespacios de  $V$ , se define el subespacio SUMA de  $V_1$  y  $V_2$  como:

$$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 : v_i \in V_i\}$$

### 3. Sistemas de generadores

- (2)  $v = e_K v \quad \forall v \in S \Rightarrow v \in \langle S \rangle$
- (3)  $S \subset V' \subset V \Rightarrow \alpha v \in V' \quad \forall \alpha \in K, v \in V$   
 $\Rightarrow \sum_i \alpha_i v_i \in V' \Rightarrow \langle S \rangle \subset V'$

$$V_1 + V_2 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle, \quad V_1, V_2 \subset V$$

De un sistema de generadores se puede eliminar un vector sólo si éste es combinación lineal de los demás elementos de S.

$$\langle S \rangle = \langle S - \{v\} \rangle \Leftrightarrow v \in \langle S - \{v\} \rangle$$

S es linealmente independiente  $\Leftrightarrow v \notin \langle S - \{v\} \rangle \quad \forall v \in S$   
 "  $\Rightarrow$  "  $v \in \langle S - \{v\} \rangle \Rightarrow \sum \alpha_i v_i = v \Rightarrow (-v) + \sum \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow$  S linealmente dependiente.  
 "  $\Leftarrow$  "  $\exists v \in \langle S - \{v\} \rangle : \sum_i \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \exists -(\alpha_i)^{-1} \neq 0 \Rightarrow \sum_{i=2}^n \alpha_i v_i = -\alpha_1 v_1 \Rightarrow v_1 = -\alpha_1^{-1} \sum_{i=2}^n \alpha_i v_i \Rightarrow v \in \langle S - \{v\} \rangle$

Sea una combinación linealmente dependiente de vectores de  $S \cup \{v\}$  igualada a cero. Si el coeficiente de v es nulo, entonces alguno de los otros  $\alpha_i$  es distinto de 0  $\Rightarrow$  S es linealmente dependiente. Si el coeficiente de v no es nulo,  $v \in \langle S \rangle$ . En ambos casos se llega a contradicción.

Dado un conjunto de vectores de un espacio vectorial  $(V, K, \cdot)$ , S, se dice que  $v \in V$  es COMBINACIÓN LINEAL de los vectores de S si:

$$\exists v_1, v_2, \dots, v_n \in S, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K :$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = v$$

El conjunto de combinaciones lineales de vectores de S,  $\langle S \rangle$ , verifica:

- (1) es subespacio de  $(V, K, \cdot)$
- (2) contiene a S
- (3) está contenido en todos los subespacios de  $(V, K, \cdot)$  que contienen a S.

Dado un espacio vectorial, V, se dice que un conjunto S de vectores de V es un SISTEMA DE GENERADORES de V si  $\langle S \rangle = V$ .

Un conjunto S de vectores del K-espacio vectorial V es LIBRE o LINEALMENTE INDEPENDIENTE cuando  $\sum_i \alpha_i v_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall \alpha_i$ , donde  $\alpha_i \in K, v_i \in S$ . Cuando un conjunto no es libre, se dice LIGADO o LINEALMENTE DEPENDIENTE.

Si  $(V, K, \cdot)$  es un espacio vectorial, S un conjunto de vectores linealmente independientes, y  $v \notin \langle S \rangle$ , entonces  $S \cup \{v\}$  es linealmente independiente.

### 4. Bases y dimensión de un espacio vectorial

MINIMAL DE GENERADORES: de lo contrario  $\exists B - \{v\} : \langle B - \{v\} \rangle = \langle B \rangle = V$ , que implica que B es linealmente dependiente.

MAXIMAL DE INDEPENDIENTES: sabiendo que B es minimal de generadores,  $\{v\} \cup B$  linealmente independiente implicaría que  $v \notin \langle B \rangle$

Se llama BASE de un conjunto V de vectores a un subconjunto  $B \subset V$  minimal de generadores y maximal de linealmente independientes. Cada vector de V se puede expresar UNÍVOCAMENTE como combinación lineal de los vectores de su base:

$$\sum \alpha_i v_i = \sum \beta_i v_i \Rightarrow \sum (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i$$

BASE: si B es maximal de linealmente independientes, debe ser generador, pues de lo contrario  $\exists v \in V: v \notin \langle B \rangle$  y  $\{v\} \cup B$  sería libre.

BASE CANÓNICA es aquella formada por vectores coordinados unitarios, denotada por C.

Se sigue del teorema de Steinitz que ningún conjunto de vectores de V con más elementos que la base puede ser linealmente independiente, ya que en ese caso los términos de la base deberían poder sustituirse por los del conjunto.

TODAS LAS BASES DE UN MISMO ESPACIO VECTORIAL DEBEN TENER EL MISMO NÚMERO DE ELEMENTOS,  $n_B$ , ya que los términos de cada una deben ser intercambiables por los de las otras.

(1) Son generadores, porque si existiera  $v \notin \langle B \rangle$  habría un conjunto libre  $B \cup \{v\}$  con más elementos que la base, lo cual es absurdo por el teorema de Steinitz.

(2) Si no fueran linealmente independientes, sería posible eliminar alguno de ellos  $\Rightarrow$  Habría una base con  $n-1$  elementos: es absurdo por el teorema de Steinitz.

Los coeficientes  $\alpha_i$  en la combinación lineal  $\sum \alpha_i v_i = v, v_i \in B$ , se llaman COORDENADAS de v respecto de B.

TEOREMA DE EXISTENCIA DE BASE: dado un K-espacio vectorial no nulo con un conjunto finito de generadores, S,  $\exists B \subset S$  tal que B es base de V.

- (1) Si S es linealmente independiente, es base
- (2) Si es ligado,  $\exists v \in S: \langle S - \{v\} \rangle = \langle S \rangle$  y se puede eliminar del conjunto. El proceso es recursivo: se puede repetir tantas veces como sea necesario

TEOREMA DE STEINITZ: si V es un espacio vectorial con una base finita de n elementos,  $B = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ , y  $L = \{F_1, F_2, \dots, F_r\}$  es un conjunto linealmente independiente, r vectores de B se pueden sustituir por vectores de L para obtener una nueva base de V.

Demostración del teorema de Steinitz:  
 $F_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i \Rightarrow E_1 = -\alpha_1^{-1}(F_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i E_i) \Rightarrow E_1 \in \langle \{F_1, E_2, \dots, E_n\} \rangle, \{E_2, E_3, \dots, E_n\} \in \langle \{F_1, E_2, \dots, E_n\} \rangle \Rightarrow \{F_1, E_2, \dots, E_n\}$  de generadores,  $F_1 \notin \langle \{E_2, E_3, \dots, E_n\} \rangle \Rightarrow \{F_1, E_2, \dots, E_n\}$  linealmente independiente  $\Rightarrow$  El conjunto es una base

Dados un espacio vectorial, V, con una base B de n elementos, y un conjunto  $L = \{E_1, E_2, \dots, E_r\}$  de vectores de V linealmente independientes, se puede obtener una nueva base B' de V tal que  $L \subset B'$  añadiendo  $n-r$  vectores a L.

El número de vectores de una base es la DIMENSIÓN del espacio vectorial y se denota  $\dim V$ . Para  $\dim V = n$ , se cumple que:

- (1)  $B = \{E_1, \dots, E_n\}$  linealmente independientes son base.
- (2)  $B = \{E_1, \dots, E_n\}$  generadores son base.

Puesto que  $B_{U \cap V}$  tiene  $r$  elementos y se puede completar tanto a una base de  $U$ , añadiendo  $s-r$  vectores, como a una base de  $V$ , con  $t-r$  vectores,  $B_U \cup B_V$  tiene  $t+s-r$  vectores, y es base de  $U+V$ .

$B_U \cup B_V$  es base de  $B_U + B_V$ .

Demostración:

(1)  $B_U \cup B_V$  generador:  $v \in V_1 + V_2$  se puede expresar como combinación lineal de vectores de  $B_U$  ( $F_i$ ),  $B_V$  ( $F_i$ ), y  $B_U \cap B_V$  ( $F_i$ ,  $i=1,2,\dots,t$ ):  
 $v = u_1 + u_2 = \sum_{i=1}^s \alpha_i F_i + \sum_{i=1}^t \beta_i F_i + \sum_{i=t+1}^r \gamma_i E_i$   
 $\Rightarrow u_1 + u_2 = \sum_{i=1}^t (\alpha_i + \beta_i) F_i + \sum_{i=t+1}^s \alpha_i F_i + \sum_{i=1}^r \gamma_i E_i$   
 $\sum_{i=1}^t (\alpha_i + \beta_i) F_i + \sum_{i=t+1}^s \alpha_i F_i \in \langle B_1 \rangle$ ;  $\sum_{i=1}^r \gamma_i E_i \in \langle B_2 \rangle$   
 $\Rightarrow v \in \langle B_1 \cup B_2 \rangle$

(2)  $B_U \cup B_V$  linealmente independiente: si un vector de  $B_U$  se puede expresar como combinación lineal de los elementos de  $B_V$ , pertenece a la intersección de los espacios  $U$  y  $V$ . Por tanto, se puede expresar también como combinación lineal de los vectores de  $B_{U \cap V}$ .  
 $\sum_{i=1}^s \alpha_i F_i + \sum_{i=1}^s \beta_i E_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^s \alpha_i F_i \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \sum_{i=1}^s \alpha_i F_i \in \langle B_1 \cap B_2 \rangle \Rightarrow \sum_{i=1}^t \gamma_i E_i + \sum_{i=1}^t \beta_i E_i + \sum_{i=t+1}^r \lambda_i E_i = 0 \Rightarrow (\gamma_i + \beta_i) = 0$  y  $\lambda = 0 \forall i=1,2,\dots$  o la base es linealmente dependiente, lo cual es absurdo.

La FÓRMULA DE GRASSMANN relaciona la dimensión de dos espacios vectoriales con la de su suma:

$$\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V)$$

Si la intersección de dos subespacios de  $V$ ,  $V_1$  y  $V_2$ , es  $\{0\}$ , su suma se dice DIRECTA y se denota  $V_1 \oplus V_2$ . Si  $V_1 \oplus V_2$  es el propio  $V$ , los subespacios se denominan SUPLEMENTARIOS.

Existe un suplementario para cada subespacio de  $V$ . Demostración:

Sea  $V_1 \subset V$  un subespacio de  $V$  generado por  $B_{v_1} = \{E_1, \dots, E_r\}$ . Esta base se puede completar a una base de  $V$  con  $n-r$  vectores,  $n = \dim V$ :

$$B_v = \{E_1, \dots, E_r, \dots, E_n\}$$

La intersección de  $V_1$  con el espacio generado por los vectores añadidos es el 0:

$$\langle \{E_1, \dots, E_r\} \rangle \cap \langle \{E_{r+1}, \dots, E_n\} \rangle = \{0\}$$

$V_1$  y  $\langle \{E_{r+1}, \dots, E_n\} \rangle$  son espacios de intersección 0, y la unión de sus bases es una base de  $V$ :

$$\langle E_1, \dots, E_n \rangle = V$$

$\Rightarrow$  Los espacios son suplementarios.

$V_1 \cap V_2 = \{0\} \Leftrightarrow$  Hay una sola expresión  $v_1 + v_2 \forall v_1, v_2 \in V_1 + V_2$

" $\Rightarrow$ "  $V_1 \cap V_2 = \{0\} \rightarrow v_1 + v_2 = v'_1 + v'_2 \Rightarrow v_1 - v'_1 = v'_2 - v_2 \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow v_1 - v'_1 = 0 \Rightarrow v_1 = v'_1, v_2 = v'_2$

" $\Leftarrow$ "  $v \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow 0 + v = v + 0 \in V_1 \cap V_2 \rightarrow$  Como la forma de expresión es única,  $v=0$ .

## 5. Ecuaciones de un subespacio vectorial

Si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $U$  es un subespacio de  $V$  cuya base es  $\{u_1, \dots, u_r\}$ , existe un sistema de  $n-r$  ecuaciones lineales (ECUACIONES LINEALES DEL ESPACIO) del que son soluciones los vectores de  $U$ .

Parte IV

# Aplicaciones lineales y matrices

## 1. Aplicaciones lineales

MONOMORFISMO: aplicación lineal inyectiva

EPIMORFISMO: aplicación lineal sobreyectiva

ISOMORFISMO: aplicación lineal biyectiva

ENDOMORFISMO: aplicación lineal  $f:V \rightarrow V$

AUTOMORFISMO: endomorfismo biyectivo

$f:V \rightarrow W$  isomorfismo  $\Leftrightarrow f^{-1}:W \rightarrow V$  isomorfismo. Demostración: basta con comprobar que es lineal.  
 $\Rightarrow f^{-1}(v+w) = f^{-1}(f(a+b)) = a+b = f^{-1}(v) + f^{-1}(w)$   
 $f^{-1}(\alpha v) = f^{-1}(f(\alpha a)) = \alpha a = \alpha f^{-1}(v)$   
 $\Leftarrow$  Se verifica trivialmente al demostrar la primera parte, porque  $f$  se puede considerar la inversa de  $f^{-1}$ .

Dada  $f:V \rightarrow W$ , se llama RANGO de la aplicación,  $rang f$ , a la dimensión del subespacio imagen.

(1)  $\Rightarrow \dim V = n = \dim \text{Im} f$ .  $\{E_1, \dots, E_r\}$  linealmente independiente se puede completar a una base de  $V$ :  $\{E_1, \dots, E_r, \dots, E_n\} \Rightarrow \{f(E_1), \dots, f(E_n)\}$  base de  $\text{Im} f \Rightarrow \{f(E_1), \dots, f(E_n)\}$  linealmente independientes  $\Rightarrow \{f(E_1), \dots, f(E_r)\}$  linealmente independientes.

$\Leftarrow \{E_1, \dots, E_n\}$  base de  $V \Rightarrow \{f(E_1), \dots, f(E_n)\}$  libre, base de  $W \Rightarrow \dim V = \dim W \Rightarrow \dim \ker f = 0$

Dados dos espacios  $k$ -vectoriales,  $V$  y  $W$ , se dice que  $f:V \rightarrow W$  es LINEAL si verifica:

$$(1) f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

$$(2) f(\alpha v) = \alpha f(v), \alpha \in K$$

Si  $f$  es lineal,  $\text{Ker} f$  es un espacio vectorial. Una aplicación lineal  $f:V \rightarrow W$  está COMPLETAMENTE DETERMINADA si se conocen las imágenes de los vectores de una base cualquiera de su dominio,  $B = \{E_1, \dots, E_n\}$ , ya que  $\text{Im} f = \langle \{f(E_1), \dots, f(E_n)\} \rangle$ . Si  $\text{Im} f = W$ , la aplicación se dice EPIMORFISMO

Dos espacios vectoriales son ISOMORFOS,  $V \cong W$ , si entre ellos se puede establecer un isomorfismo. El espacio  $K$ -vectorial  $V$  de dimensión  $n$  es siempre isomorfo a  $K^n$ .

Una aplicación lineal  $f:V \rightarrow W$  verifica siempre:

$$\dim V = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f$$

Demostración: Una base de  $\text{Ker} f$ ,  $\{E_1, \dots, E_r\}$ , se puede completar a una de  $V$ ,  $\{E_1, \dots, E_r, \dots, E_n\}$ , de manera que  $f(E_1) = \dots = f(E_r) = 0$  y  $\{f(E_{r+1}), \dots, f(E_n)\}$  es una base de  $\text{Im} f$ . No se puede suponer lo contrario sin llegar a un absurdo, pues:  
 $\sum_{i=r+1}^n f(\alpha_i E_i) = 0 \Rightarrow f(\sum_{i=r+1}^n \alpha_i E_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=r+1}^n \alpha_i E_i \in \text{Ker} f$ , pero como todos los vectores del  $\text{Ker} f$  tienen una única expresión como combinación lineal de  $E_i$ ,  $i=1,2,\dots,r$ , se sigue que  $\alpha_i = 0 \forall i=r+1, \dots, n$ .

Una aplicación lineal es inyectiva  $\Leftrightarrow$  La imagen de cualquier conjunto de vectores linealmente independientes es linealmente independiente. (1)

(2)  $\Rightarrow$  Una base  $\{E_1, \dots, E_r\}$  genera  $V$  y  $\{f(E_1), \dots, f(E_r)\}$  genera  $\text{Im}f$ . Como la aplicación es sobreyectiva,  $\text{Im}f=W$ . Por tanto,  $\{f(E_1), \dots, f(E_r)\}$  genera  $W$ .

$\Leftarrow$  Una base  $\{E_1, \dots, E_n\}$  genera  $V$  y  $\{f(E_1), \dots, f(E_n)\}$  genera  $W$ . Sin embargo, este conjunto es a su vez generador de  $\text{Im}f$ , luego  $\text{Im}f=W$ .

Th. de clasificación

$\Rightarrow$   $\text{Im}f = W, \ker f = \{0\} \Rightarrow \dim V = \dim \text{Im}f = \dim W$

$\Leftarrow$  La aplicación lineal que lleva los elementos de la base de  $V$  a los elementos de la base de  $W$  es un isomorfismo, porque  $\text{Im}f=W$  y, como  $\dim V = \dim W, \dim \ker f=0$ .

$f:V \rightarrow W$  es sobreyectiva  $\Leftrightarrow$  El conjunto de imágenes de un sistema generador de  $V$  es generador de  $W$  (2).

TEOREMA DE CLASIFICACIÓN: Dos espacios  $K$ -vectoriales,  $V$  y  $W$ , son isomorfos  $\Leftrightarrow$  Tienen la misma dimensión.

Toda aplicación lineal  $f:V \rightarrow W$  tiene una MATRIZ ASOCIADA que, multiplicada por las coordenadas de un  $v \in V$  respecto a  $B_V$ , da como resultado las coordenadas de  $f(v)$  respecto a  $B_W$ . Los elementos de esta matriz son las coordenadas de  $f(E_i)$ ,  $E_i \in B_V$ , respecto a  $B_W$ .

Dadas dos bases,  $B_V$  y  $B'_V$ , de un mismo espacio vectorial  $V$ , se llama MATRIZ CAMBIO DE BASE,  $I_{B B'}$  a la matriz asociada a la aplicación identidad respecto de las bases  $B$  y  $B'$ .

## Parte V

## Determinantes

## 1. Definición y propiedades

El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta, por lo que toda propiedad verificada por sus filas es aplicable a sus columnas.

Determinante de la matriz diagonal:

$$\prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Determinante de la matriz triangular:

$$\prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Determinante del producto de matrices:  $|AB|=|A||B|$

La matriz adjunta,  $\text{adj}(A)$ , tiene por elementos los adjuntos de cada elemento de  $A$ .

La suma de los productos de los elementos de una fila por los adjuntos de otra es igual a 0. Si se forma una matriz  $B$  idéntica a  $A$ , salvo por la línea  $s$ , que es igual a la  $r$ , y se desarrolla  $\det(B)$  por la línea  $s$ , éste será nulo. Concluye la demostración.

Dada una matriz cuadrada,  $A$ , de orden  $n$ , se llama SUBMATRIZ de  $A$  de orden  $n-r$  a la matriz cuadrada que resulta al suprimir  $r$  filas y  $r$  columnas de  $A$ :  $A(i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r)$

El DETERMINANTE de una matriz cuadrada ( $A$ ) de orden  $n$ ,  $|A|$  o  $\det(A)$  se calcula:

$$(1) \quad n=1 \Rightarrow \det(A)=a_{11}$$

$$(2) \quad n \geq 2 \Rightarrow \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det[A(i|j)]$$

El elemento  $(-1)^{1+j} \det[A(i|j)]$  se dice cofactor o ADJUNTO de  $a_{ij}$  y se denota  $A_{ij}$ .

Dada una matriz cuadrada de orden  $n$  sobre  $\mathbb{R}$ ,  $A$ , se cumple que:

$$(1) \quad \text{Todos los elementos de una fila son nulos} \Rightarrow \det(A)=0$$

$$(2) \quad \text{Se intercambian dos filas} \Rightarrow \text{Cambia el signo del determinante}$$

$$(3) \quad \text{En } A \text{ hay dos filas iguales} \Rightarrow \det(A)=0$$

$$(4) \quad \text{Se multiplica una fila por } \lambda \Rightarrow \text{El determinante de la matriz resultante es } \lambda \det(A)$$

$$(5) \quad \text{Los elementos de dos filas son proporcionales} \Rightarrow \det(A)=0$$

$$(6) \quad \text{La fila } r \text{ es suma de dos sumandos} \Rightarrow \text{El determinante se puede descomponer en dos}$$

$$(7) \quad \text{Una fila es combinación lineal de las otras} \Rightarrow \det(A)=0$$

## 2. Matrices invertibles

$\text{rang}(A) \neq n \Rightarrow \det(A) = 0$   
 $\det(C_1, \dots, \sum \alpha_i C_j, \dots, C_n) =$   
 $\sum_{j \neq i} \alpha_j \det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n) = 0$   
 $\text{"} \det(A) = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$   
 $\exists A^{-1} \Rightarrow AA^{-1} = I$   
 $\Rightarrow \det(A) \det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0$   
 $\text{"} A \text{ no invertible} \Rightarrow \text{rang}(A) \neq n$   
 Considerar  $f_{cc} = A$ . Si fuera bi-  
 yectiva,  $f_{cc}^{-1} = A^{-1}$ , luego no lo  
 es  $\Rightarrow \text{rang}(f) < n$

Dada  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , se dice que la matriz es  
 INVERTIBLE si existe  $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  tal que  
 $AB = BA = I_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Para una matriz cuadra-  
 da de orden  $n$ , se cumple:

$$\text{rang}(A) \neq n \Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow A \text{ no es invertible}$$

De las igualdades siguientes, basadas en  
 que la suma de términos multiplicados  
 por adjuntos que no sean los suyos será  
 nula, se sigue la fórmula de la ma-  
 triz inversa:  $A(\text{adj}(A))^t = |A|I_n = (\text{adj}(A))^t A$   
 $\Rightarrow |A|^{-1} \text{adj}(A) = A^{-1}$ .

Parte VI

# Sistemas de ecuaciones lineales

## 1. Sistemas de ecuaciones lineales

SISTEMA INCOMPATIBLE: no tiene solución  
 SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO: más de una solución (infinitas, si  $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ )  
 SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO: solución única  
 SISTEMA HOMOGÉNEO:  $d_i=0 \forall i=1,2,\dots$

$v_0 \in K^n$  es solución de un sistema si  $f(v_0)=D$

$\dim \text{Ker} f = n - \text{rang}(C)$   
 $\rightarrow$  Las columnas de  $C$  generan  $\text{Im} f$ , luego  $\dim(\text{Im} f) = \text{rang}(C)$ . Por ello,  $n = \dim(\text{Im} f) + \dim(\text{Ker} f)$

En un sistema homogéneo:  $v_0$  solución  $\Rightarrow v_0 \in \text{Ker} f$ .  $\dim \text{Ker} f = n - \text{rang}(C) \Rightarrow B_{\text{Ker} f} = \langle E_1, \dots, E_{n-\text{rang}(C)} \rangle \Rightarrow v_0 = \lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_{n-\text{rang}(C)} E_{n-\text{rang}(C)} \forall v_0$  solución

- (1)  $f(v_0)=D \Rightarrow f(v_0+v) = f(v_0)+f(v) = D+0=D$
- (2)  $f(v_1-v_0)=0 \Rightarrow v_1-v_0 \in \text{Ker} f \Rightarrow v = v_1-v_0 \Rightarrow v_1 = v_0+v, v \in \text{Ker} f$

Dado un sistema de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas y coeficientes en  $K$ , de términos independientes  $D = \{d_1, \dots, d_m\}$ , se denominan MATRIZ DE COEFICIENTES y MATRIZ AMPLIADA las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} & d_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} & d_m \end{pmatrix}$$

Una lista ordenada  $v_0 \in K^n$  cuyos elementos verifiquen las  $m$  igualdades es SOLUCIÓN del sistema.

Cada sistema de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas tiene asociado una aplicación lineal  $f: K^n \rightarrow K^m$  cuya matriz es  $f_{BB'} = C$ , donde  $B$  y  $B'$  denotan las bases canónicas de  $K^n$  y  $K^m$ .

Las soluciones de un sistema homogéneo de  $n$  ecuaciones lineales dependen de  $n - \text{rang}(C)$  parámetros, donde  $n$  es el número de columnas.

Para un sistema de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas, se verifica que:

- (1)  $v_0 \in K^n$  solución  $\Rightarrow v_0+v$  solución  $\forall v \in \text{Ker} f$
- (2)  $v_0, v_1 \in K^n$  soluciones  $\Rightarrow \exists v \in \text{Ker} f : v_1 = v_0+v$

Como corolario, si  $v_0$  es solución del sistema, el resto de soluciones son de la forma  $v_0+v, v \in \text{Ker} f$ .

## 2. Teorema de Rouché-Frobenius

- (1) Sistema compatible  $\Leftrightarrow$   
 $D \in \text{Im}f = \langle \text{Columnas de } C \rangle$   
 $\Leftrightarrow \text{rang}(C) = \text{rang}(A)$
- (2)  $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = n \Leftrightarrow$  Sistema compatible,  $f$  inyectiva  
 $(\dim \text{Ker}f = n - n) \Leftrightarrow \exists! v \in K^n : f(v) = D$
- (3)  $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) < n \Leftrightarrow$  Es compatible, y por (2) no está determinado
- (4) Sistema homogéneo  $\Leftrightarrow$   
 $(0, \dots, 0) \in K^n$  solución  $\Rightarrow$

- (1)  $\text{rang}(C) < \text{rang}(A) \Leftrightarrow$  Sistema incompatible
- (2)  $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = n \Leftrightarrow$  Sistema compatible determinado
- (3)  $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) < n \Leftrightarrow$  Sistema compatible indeterminado
- (4) En un sistema homogéneo:
- (1)  $\text{rang}(C) = n \Leftrightarrow$  Solución única  $(0, \dots, 0)$
- (2)  $\text{rang}(C) < n \Leftrightarrow$  Infinitas soluciones

- (4)  $\begin{cases} \text{rang}(C) = n \Leftrightarrow (0, \dots, 0) \text{ es solución única} \\ \text{rang}(C) \neq n \Leftrightarrow \text{Ker}f \neq \{0\} \Leftrightarrow v_0 + v \text{ solución } \forall v \in \text{Ker}f \end{cases}$

## 3. Regla de Cramer

Se llama MATRIZ DE LA INCÓGNITA  $x_j$ ,  $A_j$ , a la matriz que resulta de sustituir por  $D$  la columna  $j$  de la matriz de coeficientes. Dado un sistema de  $n$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas, se cumple que:

- (1)  $\det(A_j) = x_j \det(A)$
- (2) Si el sistema es de Cramer ( $\det(C) \neq 0$ ), la solución viene dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

Parte VII

Diagonalización de matrices

" $\Rightarrow$ "  $\exists D, S : S^{-1}AS = D \Rightarrow \det(S) \neq 0$   
 $\Rightarrow I_{BC} = S \Rightarrow f_{BB} = I_{CB} f_{CC} I_{BC} = D$   
" $\Leftarrow$ "  $f_{CC} = D, f_{BB}$  diagonal  $\Rightarrow$   
 $f_{BB} = I_{CB} f_{CC} I_{BC} \rightarrow I_{BC} = S,$   
 $I_{CB} = S^{-1} \rightarrow S^{-1}AS$  diagonal

A diagonalizable  $\Rightarrow A^n$  diagonalizable,  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Demostración:  
 $A = SDS^{-1} \Rightarrow A^n = (SDS^{-1})^n \Rightarrow$   
 $A^n = SDS^{-1} SDS^{-1} \dots SDS^{-1} = SD^n S^{-1}$   
 $\Rightarrow S^{-1} A^n S = D^n$  diagonal

$Av = \lambda v \Rightarrow A(\mu v) = \mu(\lambda v) = \lambda(\mu v)$

$B = S^{-1}AS \rightarrow S^{-1}(A - xI)S = S^{-1}AS - xS^{-1}IS = B - xI$   
 $|S^{-1}(A - xI)S| = |A - xI| = |B - xI|$

La matriz S es unión de bases de  $\ker(A - \lambda_i I)$  puestas en columna.

0 es autovalor de A  $\Leftrightarrow \det(A) = 0$   
" $\Rightarrow$ "  $\exists v \neq 0 : Av = \bar{0} \Rightarrow v \in \ker A \Rightarrow$   
 $\text{rang}(A) < n \Rightarrow \det(A) = 0$   
" $\Leftarrow$ "  $Q_{A_0} = |A - 0I| = \det(A) = 0$

$\lambda$  autovalor  $\Rightarrow \ker(A - \lambda I) \neq \{\bar{0}\}$   
 $(A - \lambda I)v = Av - \lambda v = \bar{0} \Rightarrow v \in \ker(A - \lambda I)$   
 $(v \neq \bar{0})$   
 $\ker(A - \lambda I) \neq \{\bar{0}\} \Rightarrow \text{rang}(A - \lambda I) < n$   
 $n = \dim \ker(A - \lambda I) + \text{rang}(A - \lambda I)$  (Te-ma 4)  
 $\text{rang}(A - \lambda I) < n \Rightarrow |A - \lambda I| = 0$   
 Por las propiedades del determinante.

Una matriz  $D = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  es DIAGONAL si  $i \neq j$  implica  $a_{ij} = 0$ . Dos matrices A y  $B \in M_{n \times n}(K)$  son SEMEJANTES si  $\exists S^{-1}, S \in M_{n \times n}(K) : B = S^{-1}AS$ . Esta relación se denota  $A \sim B$ . Si la matriz B es diagonal, A se dice DIAGONALIZABLE.

La matriz A es diagonalizable  $\Leftrightarrow$  El endomorfismo  $f: K^n \rightarrow K^n$  con  $f_{CC} = A$  es diagonalizable (existe una base B de  $K^n$  tal que  $f_{BB}$  es diagonal).

Dada  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , son AUTOVECTORES de A aquellos  $v \in K^n$  para los que existe  $\lambda \in K : Av = \lambda v$  ( $v \neq \bar{0}$ ). El coeficiente  $\lambda$  se denomina AUTOVALOR o valor propio de A.

Un autovector está asociado a un único autovalor, pero cada uno de éstos se asocia a infinitos vectores.

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  es diagonalizable  $\Leftrightarrow$  Existen  $\lambda_i$  y  $v_i$  tales que  $(A - \lambda_i I)v_i = 0, v_i \neq \bar{0}$ . Los autovalores son raíces del polinomio  $|A - xI|$ , que se dice CARACTERÍSTICO. Éste es común para dos matrices semejantes:

$A \sim B \Rightarrow |A - xI| = |B - xI|$

$\lambda$  autovalor de A  $\Leftrightarrow \ker(A - \lambda I) \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{rang}(A - \lambda I) < n \Leftrightarrow \lambda$  raíz de  $|A - xI|$

CONCLUSIÓN: si una matriz  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  es diagonalizable, se cumple que:

- (1) Su polinomio característico tiene todas las raíces en el cuerpo K, ya que son elementos de la matriz diagonal
- (2) La multiplicidad de cada autovalor como raíz del polinomio característico coincide con la dimensión del  $\ker(A - \lambda_i I)$